TP 3
Résultants et éliminations.

Dans tout ce TP, on calculera les résultants dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Exercice 1 : (Premiers calculs)

1. Considérons le système
$$\begin{cases} f_1 &= X^2Y^2 + X^3 - X^2Y + Y^3 + XY - 3Y^2 - 2X + 2Y \\ f_2 &= X^4 + X^3Y + X^2Y + XY^2 - 3X^2 - 2XY - Y + 2 \\ f_3 &= X^3 + X^2Y + XY - 2X - 2. \end{cases}$$
Calculer $\mathrm{Res}_X(f_1, f_3)$, $\mathrm{Res}_X(f_2, f_3)$, $\mathrm{Res}_Y(f_1, f_3)$ et $\mathrm{Res}_Y(f_2, f_3)$.
On pourra utiliser la fonction `resultant` de Sage.

2. Calculer $\mathrm{Res}_X(f_1, f_2)$ et $\mathrm{Res}_Y(f_1, f_2)$. Que peut-on en déduire sur f_1 et f_2 ?

3. Calculer toutes les solutions dans $\overline{\mathbb{Q}}^2$ du système
$$\begin{cases} X^2 + 2Y^2 &= 3 \\ X^2 + XY + Y^2 &= 3. \end{cases}$$
On pourra utiliser les fonctions `polynomial`, `change_ring` et `roots` de Sage.

Exercice 2 : (Polynômes annulateurs - le retour)

Considérons les deux polynômes $f = X^6 + 2$ et $g = Y^4 + 1$, et notons α_i (respectivement β_j) les racines de f (respectivement g) dans $\overline{\mathbb{Q}}$. À l'aide des résultants, déterminer un polynôme dont les racines sont

1. toutes les valeurs $\alpha_i + 3\beta_j$;

2. toutes les valeurs $5\alpha_i\beta_j$;

3. toutes les valeurs $\frac{\alpha_i}{2\beta_j}$.

Exercice 3 : (Polynômes symétriques - le retour)

Écrire le polynôme symétrique $X_1^5X_2^5X_3^5 + X_1^3X_2 + X_1^3X_3 + X_1^2 + X_1X_2^3 + X_1X_3^3 + X_2^3X_3 + X_2^2 + X_2X_3^3 + X_3^2$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires $S_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $S_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3$ et $S_3 = X_1X_2X_3$.

Exercice 4 : (Formule de Héron)

Héron d'Alexandrie (I^{er} siècle après J.-C.) a découvert une formule de l'aire Δ d'un triangle non plat générique ABC en fonction des longueurs a, b et c de ses trois côtés. En utilisant le triangle ci-dessous ainsi que les résultants, déterminer la formule de Héron.